Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Théme : Suites réelles

Monotonie d'une suite

Exercice :

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = \frac{2n+3}{n+1}$; pour tout $n \in IN$.

1°) Montrer que pour tout $n \in IN$: $2 \leq U_n \leq 3$.

2°) Etudier la monotonie de la suite (U_n).

1°) $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n - 2 = \frac{2n+3}{n+1} - 2$

$= \frac{2n+3-2(n+1)}{n+1}$

$= \frac{2n+3-2n-2}{n+1}$

$= \frac{1}{n+1} > 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \geq 2$ (1)

b) $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n - 3 = \frac{2n+3}{n+1} - 3$

$= \frac{2n+3-3n-3}{n+1}$

$= -\frac{n}{n+1} \leqslant 0$

Donc $u_n \leqslant 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 \leqslant u_n \leqslant 3}$

1ère Méthode : $u_{n+1} - u_n \longrightarrow > 0 \nearrow$; $< 0 \searrow$

2ème Méthode $\frac{u_{n+1}}{u_n} \; ? \; 1$

si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n \Rightarrow (u_n) \nearrow$

si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow u_{n+1} < u_n \Rightarrow (u_n) \searrow$

a) $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+3}{(n+1)+1} - \frac{2n+3}{n+1}$

$= \frac{2n+5}{n+2} - \frac{2n+3}{n+1}$

$$= \frac{(2n+5)(n+1) - (2n+3)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{2n^2 + 2n + 5n + 5 - 2n^2 - 4n - 3n - 6}{(n+1)(n+2)}$$

$$= -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} \leq u_n$

Ainsi **(u_n) est décroissante**